Optique – Chapitre 3

Superposition de deux ondes lumineuses

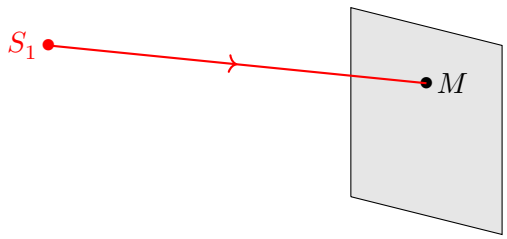
I. Interférences à deux ondes . . . 1
I.1. Expression de l'intensité lumineuse dans le cas d'une source unique . . . 1
I.2. Expression de l'intensité lumineuse dans le cas de deux sources . . . 2
I.3. Conditions d'interférences et formule de Fresnel . . . 3
I.4. Interférences constructives et destructives . . . 4
I.5. Contraste . . . 6
II. Étude du dispositif interférentiel des trous d'Young . . . 7
II.1. Présentation du dispositif . . . 7
II.2. Expression de l'intensité lumineuse sur l'écran . . . 7
II.3. Figure d'interférences . . . 8
II.4. Comparaison au dispositif des fentes d'Young . . . 9

À l'aide du modèle scalaire des ondes lumineuses, nous allons caractériser les interférences qui résultent de la superposition de deux ondes. Nous étudierons ensuite un exemple de système optique générant de telles interférences : le dispositif des trous d'Young.

I. Interférences à deux ondes

I.1. Expression de l'intensité lumineuse dans le cas d'une source unique

On considère une source lumineuse ponctuelle S_1 émettant une onde monochromatique dans un milieu homogène, et on souhaite déterminer l'expression de l'intensité lumineuse en un point M sur un écran situé à grande distance.



Dans le cadre du modèle scalaire des ondes lumineuses, la vibration scalaire au point M s'exprime :

$$s_1(M,t) = S_{0,1}\cos\phi_1 = S_{0,1}\cos\left[\omega_1\, t - \frac{2\,\pi}{\lambda_{0,1}}\,(S_1M) + \varphi_1\right]$$

d'où l'expression de l'intensité lumineuse :

$$I_1(M) = \langle s_1^2(M,t)\rangle = \langle S_{0,1}^2\cos^2\phi_1\rangle$$

où $S_{0,1}$ est une constante, soit :

$$I_1(M) = S_{0,1}^2\,\langle\cos^2\phi_1\rangle = S_{0,1}^2\left\langle\cos^2\left[\omega_1\, t - \frac{2\,\pi}{\lambda_{0,1}}\,(S_1M) + \varphi_1\right]\right\rangle.$$

On peut montrer en mathématiques qu'avec des constantes a et b indépendantes du temps, on obtient les moyennes temporelles suivantes :

$$\langle\cos\,(a\,t+b)\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle\cos^2\,(a\,t+b)\rangle = \frac{1}{2}$$

d'où on en déduit que :

$$\left\langle \cos^2\left[\omega_1\, t - \frac{2\,\pi}{\lambda_{0,1}}\,(S_1M) + \varphi_1\right]\right\rangle = \frac{1}{2}.$$

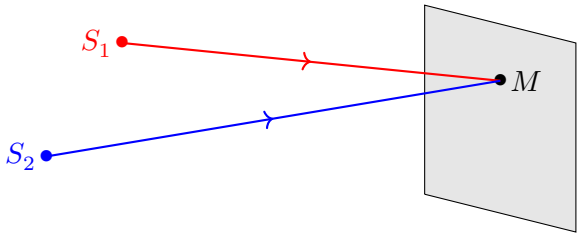
On obtient finalement :

$$I_1(M) = \frac{S_{0,1}^2}{2}$$

l'intensité lumineuse est indépendante de la position du point M, elle est donc uniforme sur l'écran.

I.2. Expression de l'intensité lumineuse dans le cas de deux sources

On considère deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 émettant chacune une onde monochromatique dans un milieu homogène, et on souhaite déterminer l'expression de l'intensité lumineuse en un point M sur un écran situé à grande distance.



Dans le cadre du modèle scalaire des ondes lumineuses, la vibration scalaire au point M résulte de la superposition des deux ondes et s'exprime :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t) = S_{0,1}\cos\phi_1 + S_{0,2}\cos\phi_2$$

d'où l'expression de l'intensité lumineuse :

$$I(M) = \langle s^2(M,t)\rangle = \left\langle S_{0,1}^2\cos^2\phi_1 + S_{0,2}^2\cos^2\phi_2 + 2\,S_{0,1}\,S_{0,2}\cos\phi_1\cos\phi_2\right\rangle$$

où $S_{0,1}$ et $S_{0,2}$ sont des constantes, et on rappelle la propriété trigonométrique suivante :

$$\cos\phi_1\cos\phi_2 = \frac{\cos(\phi_1+\phi_2) + \cos(\phi_1-\phi_2)}{2}$$

soit :

$$I(M) = S_{0,1}^2\,\langle\cos^2\phi_1\rangle + S_{0,2}^2\,\langle\cos^2\phi_2\rangle + S_{0,1}\,S_{0,2}\,\langle\cos(\phi_1+\phi_2)\rangle + S_{0,1}\,S_{0,2}\,\langle\cos(\phi_1-\phi_2)\rangle\,.$$

On peut calculer les trois premières moyennes temporelles (la dernière est plus complexe) :

- $\langle\cos^2\phi_1\rangle = \left\langle \cos^2\left[\omega_1\,t - \dfrac{2\,\pi}{\lambda_{0,1}}\,(S_1M) + \varphi_1\right]\right\rangle = \dfrac{1}{2}$;
- $\langle\cos^2\phi_2\rangle = \left\langle \cos^2\left[\omega_2\,t - \dfrac{2\,\pi}{\lambda_{0,2}}\,(S_2M) + \varphi_2\right]\right\rangle = \dfrac{1}{2}$;
- $\langle\cos(\phi_1+\phi_2)\rangle = \left\langle \cos\left[\underbrace{(\omega_1+\omega_2)}_{\neq 0}\,t - \left(\dfrac{2\,\pi}{\lambda_{0,1}}\,(S_1M) + \dfrac{2\,\pi}{\lambda_{0,2}}\,(S_2M)\right) + \varphi_1 + \varphi_2\right]\right\rangle = 0$;

d'où :

$$I(M) = \frac{S_{0,1}^2}{2} + \frac{S_{0,2}^2}{2} + S_{0,1}\,S_{0,2}\,\langle\cos(\phi_1-\phi_2)\rangle\,.$$

En posant $I_1 = \dfrac{S_{0,1}^2}{2}$ et $I_2 = \dfrac{S_{0,2}^2}{2}$ les intensités lumineuses constantes obtenues sur l'écran dans le cas d'une source unique, on peut exprimer :

$$S_{0,1}\,S_{0,2} = \sqrt{2\,I_1}\,\sqrt{2\,I_2} = 2\,\sqrt{I_1\,I_2}$$

et on obtient finalement :

$$I(M) = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1\,I_2}\,\langle\cos(\phi_1 - \phi_2)\rangle}_{\text{terme d'interférence}}$$

l'intensité lumineuse peut dépendre de la position du point M qui apparait dans le terme d'interférence, elle n'est donc pas forcément uniforme sur l'écran.

I.3. Conditions d'interférences et formule de Fresnel

Pour observer des interférences sur l'écran dans le cas de la superposition de deux ondes, le terme d'interférence ne doit pas s'annuler en chaque point, et nous allons mettre en évidence deux conditions à respecter pour cela.

Condition sur la fréquence

Si les deux ondes monochromatiques sont de pulsations différentes, soit $\omega_1 \neq \omega_2$, on obtient :

$$\langle\cos(\phi_1 - \phi_2)\rangle = \left\langle \cos\left[\underbrace{(\omega_1 - \omega_2)}_{\neq 0}\,t - \left(\frac{2\,\pi}{\lambda_{0,1}}\,(S_1M) - \frac{2\,\pi}{\lambda_{0,2}}\,(S_2M)\right) + \varphi_1 - \varphi_2\right]\right\rangle = 0$$

d'où une intensité lumineuse :

$$I(M) = I_1 + I_2$$

il n'y a pas d'interférences sur l'écran.

On en conclut que seules des ondes **synchrones**, c'est-à-dire de même pulsation, peuvent interférer.

Condition sur la cohérence

Si les deux ondes sont émises par des sources différentes, alors leurs phases à l'origine φ_1 et φ_2 varient aléatoirement d'un train d'onde à l'autre, et la différence $\varphi_1 - \varphi_2$ varie également de façon aléatoire au cours du temps puisqu'elle correspond à des trains d'onde différents. On obtient alors :

$$\langle\cos(\phi_1 - \phi_2)\rangle = \left\langle \cos\left[(\omega_1 - \omega_2)\,t - \left(\frac{2\,\pi}{\lambda_{0,1}}\,(S_1M) - \frac{2\,\pi}{\lambda_{0,2}}\,(S_2M)\right) + \underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{\text{aléatoire}}\right]\right\rangle = 0$$

d'où une intensité lumineuse :

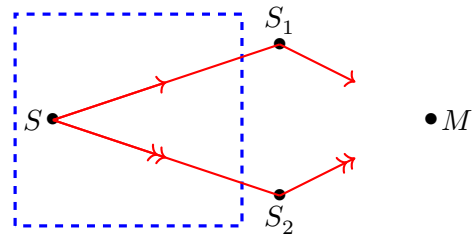
$$I(M) = I_1 + I_2$$

il n'y a pas d'interférences sur l'écran.

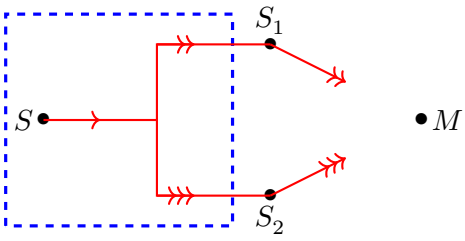
On en conclut que seules des ondes **cohérentes** entre elles, c'est-à-dire issues du même train d'onde, peuvent interférer.

En pratique, les ondes sont cohérentes entre elles si elles sont émises par des **sources secondaires** S_1 et S_2 qui sont issues d'une même **source primaire** S, et on obtient alors $\varphi_1 = \varphi_2$. Il existe deux types de dispositifs interférentiels permettant d'obtenir de telles sources secondaires :

- les dispositifs à **division du front d'onde**, où deux faisceaux lumineux différents provenant d'une même source primaire sont utilisés pour former les deux sources secondaires ;
- les dispositifs à **division d'amplitude**, où un même faisceau lumineux provenant d'une source primaire est divisé en deux pour former les deux sources secondaires (souvent à l'aide de surfaces semi-réfléchissantes).



dispositif à division du front d'onde



dispositif à division d'amplitude

Différence de marche

On définit la **différence de marche** au point M comme la différence de chemin optique entre les deux ondes qui interfèrent en ce point, soit :

$$\boxed{\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)}$$

que l'on pourrait également exprimer $\delta(M) = (S_1M) - (S_2M)$ comme les sources S_1 et S_2 sont nommées arbitrairement.

Bilan

On déduit des résultats précédents que les deux ondes interfèrent si elles sont **synchrones** ($\omega_1 = \omega_2$) et **cohérentes** entre elles ($\varphi_1 = \varphi_2$), on obtient alors une intensité lumineuse sur l'écran qui est donnée par la **formule de Fresnel** :

$$\boxed{I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1\, I_2}\cos\left[\Delta\phi(M)\right]}$$

où le **déphasage** au point M s'exprime :

$$\boxed{\Delta\phi(M) = \frac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\delta(M)}.$$

Lorsque ces conditions ne sont pas vérifiées, l'intensité lumineuse sur l'écran est simplement la somme des intensités dues à chaque source :

$$\boxed{I(M) = I_1 + I_2}.$$

I.4. Interférences constructives et destructives

Des interférences en un point M sur un écran sont qualifiées de :

- **constructives** si l'intensité lumineuse $I(M)$ correspond à un maximum, on le note I_{max} ;
- **destructives** si l'intensité lumineuse $I(M)$ correspond à un minimum, on le note I_{min}.

On peut caractériser les extremums de l'intensité lumineuse par une étude du déphasage, de l'ordre d'interférences ou de la différence de marche.

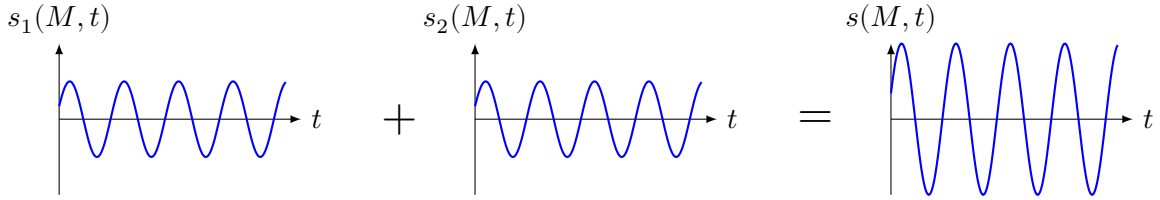
Étude du déphasage

Dans le cas de la superposition de deux ondes, on déduit de la formule de Fresnel que :

- les interférences sont constructives lorsque $\cos[\Delta\phi(M)] = 1$, c'est-à-dire qu'elles correspondent à un déphasage qui peut s'exprimer :

$$\Delta\phi(M) = 2\,\pi\,k$$

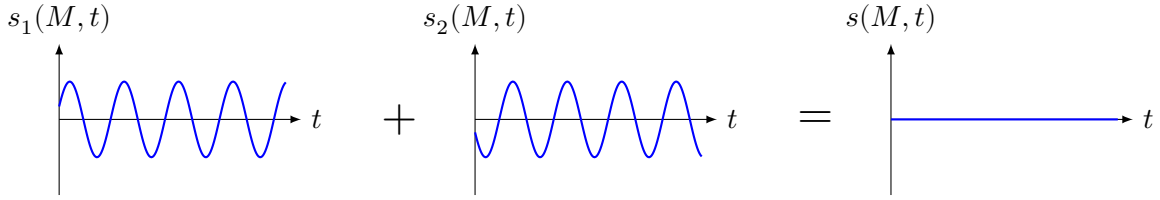
avec $k \in \mathbb{Z}$, les ondes sont alors **en phase**, et on peut représenter schématiquement l'évolution de leurs vibrations scalaires :



- les interférences sont destructives lorsque $\cos[\Delta\phi(M)] = -1$, c'est-à-dire qu'elles correspondent à un déphasage qui peut s'exprimer :

$$\Delta\phi(M) = \pi + 2\,\pi\,k$$

avec $k \in \mathbb{Z}$, les ondes sont alors **en opposition de phase**, et on peut représenter schématiquement l'évolution de leurs vibrations scalaires :



Étude de l'ordre d'interférences

On définit l'**ordre d'interférences** au point M tel que :

$$\boxed{p(M) = \frac{\Delta\phi(M)}{2\,\pi}}.$$

Dans le cas de la superposition de deux ondes, on peut alors exprimer l'intensité lumineuse sur l'écran en fonction de l'ordre d'interférences :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\,\sqrt{I_1\,I_2}\cos[2\,\pi\,p(M)]$$

et on en déduit que :

- les interférences sont constructives lorsque $\cos[2\,\pi\,p(M)] = 1$, c'est-à-dire qu'elles correspondent à un ordre d'interférences entier :

$$p(M) = k$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

- les interférences sont destructives lorsque $\cos[2\,\pi\,p(M)] = -1$, c'est-à-dire qu'elles correspondent à un ordre d'interférences demi-entier :

$$p(M) = k + \frac{1}{2}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Étude de la différence de marche

Application :

Dans le cas de la superposition de deux ondes, déterminons les différences de marche qui permettent d'obtenir des interférences constructives et destructives.

- Les interférences sont constructives lorsque $\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right] = 1$, c'est-à-dire qu'elles correspondent à une différence de marche telle que : $\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M) = 2\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, d'où : $\delta(M) = k\lambda_0$.
- Les interférences sont destructives lorsque $\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right] = -1$, c'est-à-dire qu'elles correspondent à une différence de marche telle que : $\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M) = \pi + 2\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, d'où : $\delta(M) = \frac{\lambda_0}{2} + k\lambda_0$.

I.5. Contraste

Des interférences sur un écran ne sont bien visibles que si les interférences constructives sont bien plus lumineuses que les interférences destructives, sinon l'écran semble éclairé de façon uniforme. Pour caractériser cette visibilité, on définit alors le **contraste** :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

qui est un nombre compris entre 0 et 1.

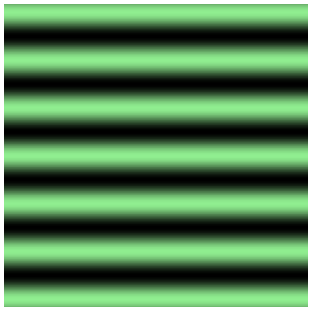
Application :

Dans le cas de la superposition de deux ondes, exprimons le contraste en fonction des intensités I_1 et I_2, puis déterminons la relation entre I_1 et I_2 permettant d'obtenir un contraste maximal.

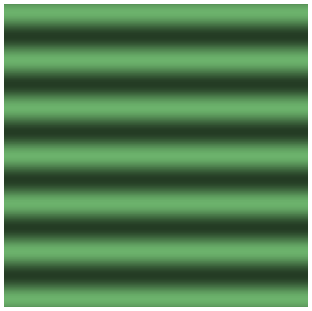
On déduit de la formule de Fresnel que : $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ et $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$, d'où l'expression du contraste : $C = \frac{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} - I_1 - I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} + I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$.

On obtient un contraste maximal si $C = 1$, soit : $\frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = 1$, ce qui n'est vérifié que lorsque $I_1 = I_2$.

Pour obtenir des interférences bien visibles avec deux ondes, il faut donc que leurs intensités soient voisines, soit $I_1 \approx I_2$. Si $I_1 \gg I_2$ ou $I_1 \ll I_2$, on obtient un contraste proche de zéro, et on dit que les interférences sont brouillées. On donne ci-dessous des exemples d'interférences obtenues pour différentes valeurs de contraste.



$C = 1$



$C = 0{,}5$



$C = 0{,}1$

II. Étude du dispositif interférentiel des trous d'Young

II.1. Présentation du dispositif

On rappelle l'expérience des trous d'Young ci-dessous, il s'agit d'un dispositif interférentiel à division du front d'onde. Notre étude va permettre de caractériser les interférences observées sur l'écran, c'est-à-dire la succession de franges brillantes et de franges sombres, mais pas le phénomène de diffraction responsable du disque et des anneaux concentriques. Cela revient donc à décrire l'intensité lumineuse à proximité du centre de l'écran.

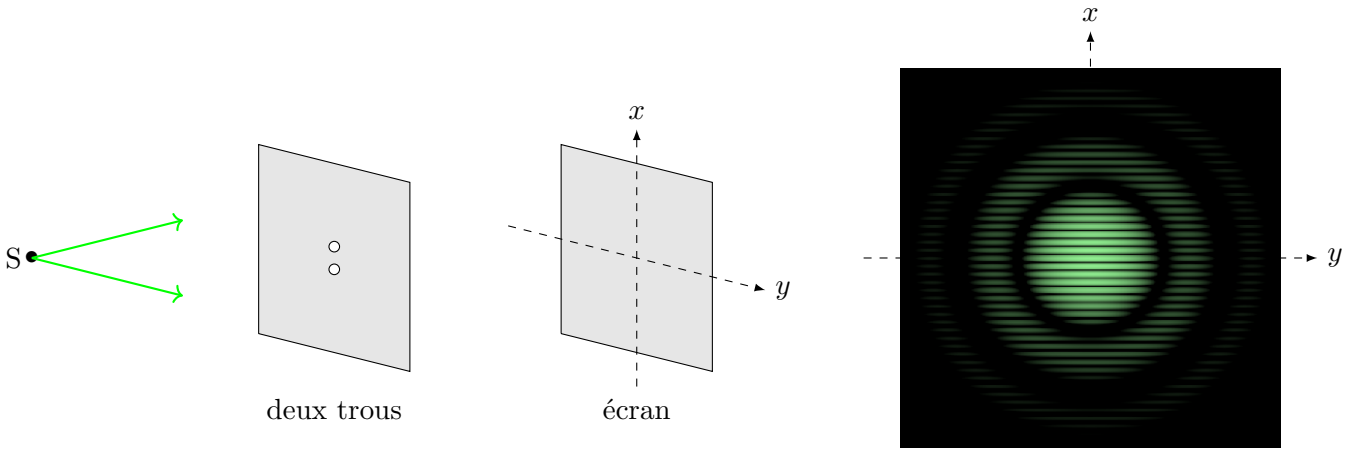
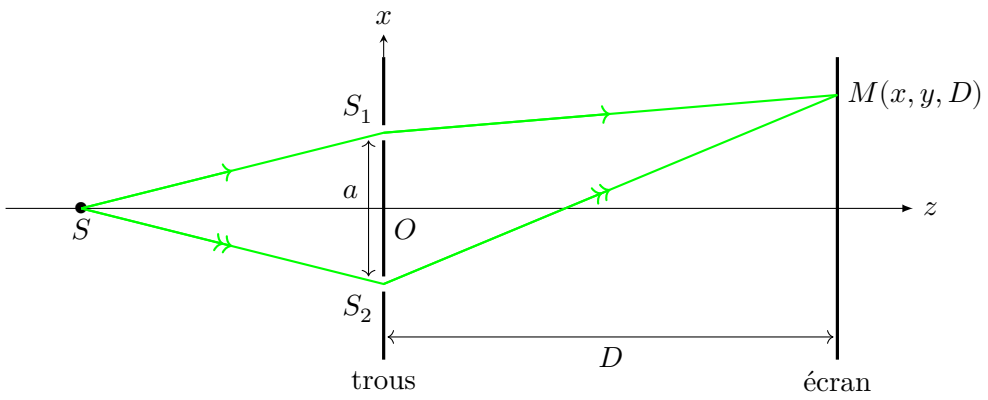


figure observée sur l'écran

Le dispositif est constitué d'une source primaire S ponctuelle et monochromatique qui éclaire deux trous espacés d'une distance a. Les trous étant de petites tailles, ils diffractent la lumière et forment ainsi deux sources secondaires S_1 et S_2 ponctuelles, monochromatiques, synchrones et cohérentes entre elles. On étudie les interférences générées en un point $M(x, y, D)$ d'un écran situé à une distance $D \gg a, x, y$. L'étude est réalisée dans un milieu homogène d'indice optique n.



II.2. Expression de l'intensité lumineuse sur l'écran

On suppose que les intensités des deux ondes qui arrivent sur l'écran sont identiques, et on pose : $I_1 = I_2 = I_0$. Ces deux ondes étant synchrones et cohérentes entre elles, l'intensité lumineuse sur l'écran s'exprime à l'aide de la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0\, I_0}\cos\left[\frac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\delta(M)\right] = 2\,I_0\left\{1 + \cos\left[\frac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\delta(M)\right]\right\}$$

avec la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent au point M :

$$\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = [(SS_2) + (S_2M)] - [(SS_1) + (S_1M)] = [n\,SS_2 + n\,S_2M] - [n\,SS_1 + n\,S_1M]$$

où $SS_1 = SS_2$ par symétrie, soit :

$$\delta = n\,[S_2M - S_1M]\,.$$

Pour exprimer les distances géométriques S_1M et S_2M, on utilise les coordonnées des différents points : $S_1\left(\frac{a}{2},0,0\right)$, $S_2\left(-\frac{a}{2},0,0\right)$ et $M\,(x,y,D)$.

On peut alors exprimer :

$$S_1M=\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+D^2}=\sqrt{x^2-a\,x+\frac{a^2}{4}+y^2+D^2}$$

et comme $D\gg a,x,y$, on peut factoriser par D afin d'utiliser le développement limité $\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\frac{1}{2}\,\varepsilon$, soit :

$$S_1M=D\sqrt{1+\frac{x^2-a\,x+\frac{a^2}{4}+y^2}{D^2}}\approx D\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{x^2-a\,x+\frac{a^2}{4}+y^2}{D^2}\right].$$

On peut exprimer de façon équivalente la distance géométrique S_2M, et cela revient juste à remplacer a par $-a$ dans les expressions précédentes, d'où :

$$S_2M\approx D\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{x^2+a\,x+\frac{a^2}{4}+y^2}{D^2}\right].$$

Au final, on obtient pour la différence de marche :

$$\delta=n\,D\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{x^2+a\,x+\frac{a^2}{4}+y^2}{D^2}-1-\frac{1}{2}\,\frac{x^2-a\,x+\frac{a^2}{4}+y^2}{D^2}\right]=n\,D\,\frac{a\,x}{D^2}$$

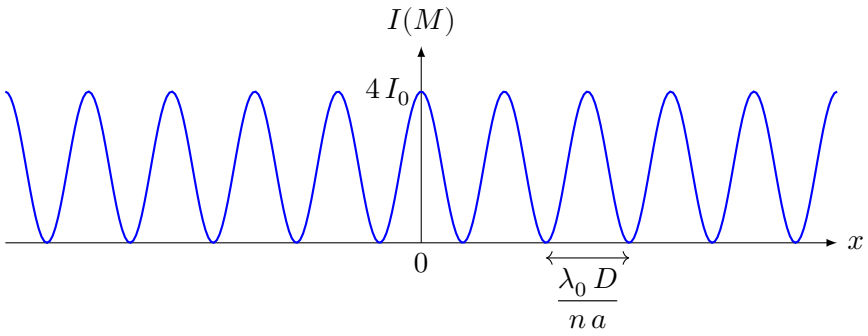
soit :

$$\boxed{\delta=\frac{n\,a\,x}{D}}.$$

L'intensité lumineuse sur l'écran s'exprime donc :

$$I(M)=2\,I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\frac{n\,a\,x}{D}\right)\right]$$

et on peut représenter son évolution en fonction de x :



II.3. Figure d'interférences

L'intensité lumineuse sur l'écran évolue de façon périodique avec la coordonnée x, et elle est indépendante de la coordonnée y, ce qui est cohérent avec l'observation de franges d'interférences **rectilignes** dans la direction (Oy).

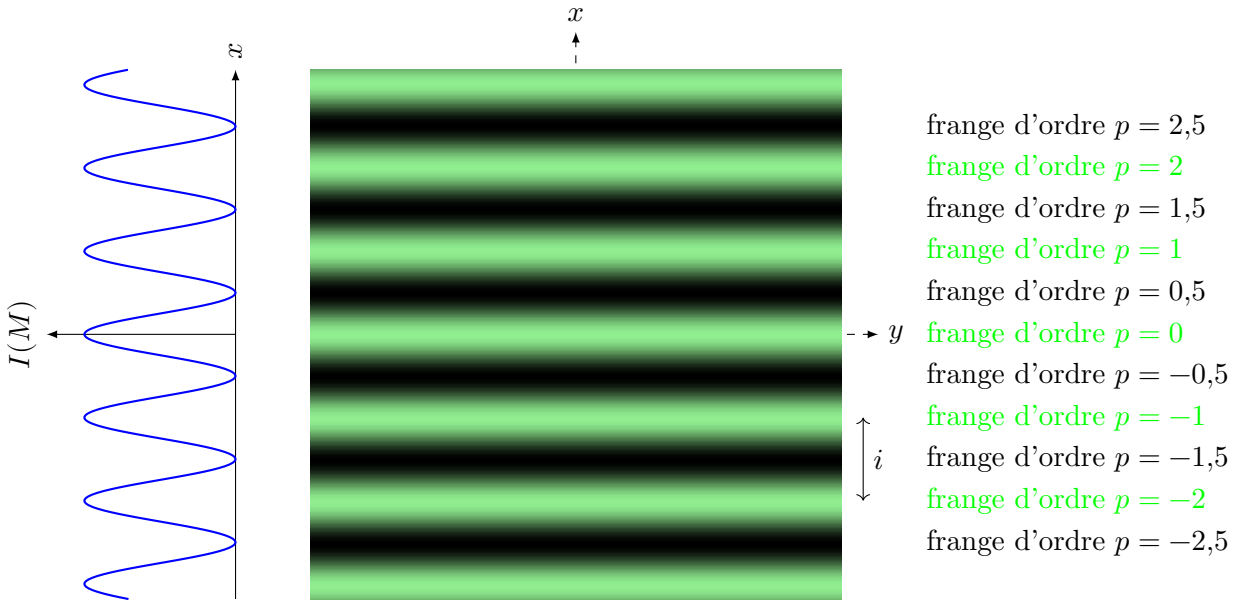


figure d'interférences au centre de l'écran

- Les franges brillantes correspondent à des interférences constructives, et donc à un ordre d'interférences p entier.
- Les franges sombres correspondent à des interférences destructives, et donc à un ordre d'interférences p demi-entier.

On dit que ces franges sont **non localisées**, c'est-à-dire qu'elles apparaissent quelle que soit la distance D de l'écran, ce qui n'est pas le cas de tous les dispositifs interférentiels.

On définit l'**interfrange** i comme la distance sur l'écran entre deux franges brillantes successives, ou deux franges sombres successives. Pour une frange brillante d'ordre p qui se situe à la position x_p, la frange brillante suivante d'ordre $p+1$ se situe à la position $x_p + i$, et l'interfrange vérifie donc la relation :

$$p(x_p + i) = p(x_p) + 1.$$

Application :

On réalise l'expérience des trous d'Young dans l'air avec un laser hélium-néon de longueur d'onde $\lambda_0 = 633\,\text{nm}$ qui éclaire deux trous espacés d'un distance $a = 0{,}50\,\text{mm}$.
Déterminons l'expression de l'interfrange des franges d'interférences observées sur un écran situé à une distance $D = 100\,\text{cm}$, puis calculons sa valeur numérique.

L'ordre d'interférences s'exprime : $p(x) = \dfrac{\Delta\phi}{2\,\pi} = \dfrac{1}{2\,\pi}\dfrac{2\,\pi\,\delta}{\lambda_0} = \dfrac{n\,a\,x}{\lambda_0\,D}$, avec $n = 1$ dans l'air.

L'interfrange vérifie : $p(x_p + i) = p(x_p) + 1$, soit : $\dfrac{a\,(x_p + i)}{\lambda_0\,D} = \dfrac{a\,x_p}{\lambda_0\,D} + 1$, d'où : $i = \dfrac{\lambda_0\,D}{a}$.

On obtient : $i = 1{,}3\,\text{mm}$.

II.4. Comparaison au dispositif des fentes d'Young

Le dispositif des fentes d'Young est similaire au dispositif des trous d'Young, en remplaçant les trous par des fentes fines parallèles à l'axe (Oy).

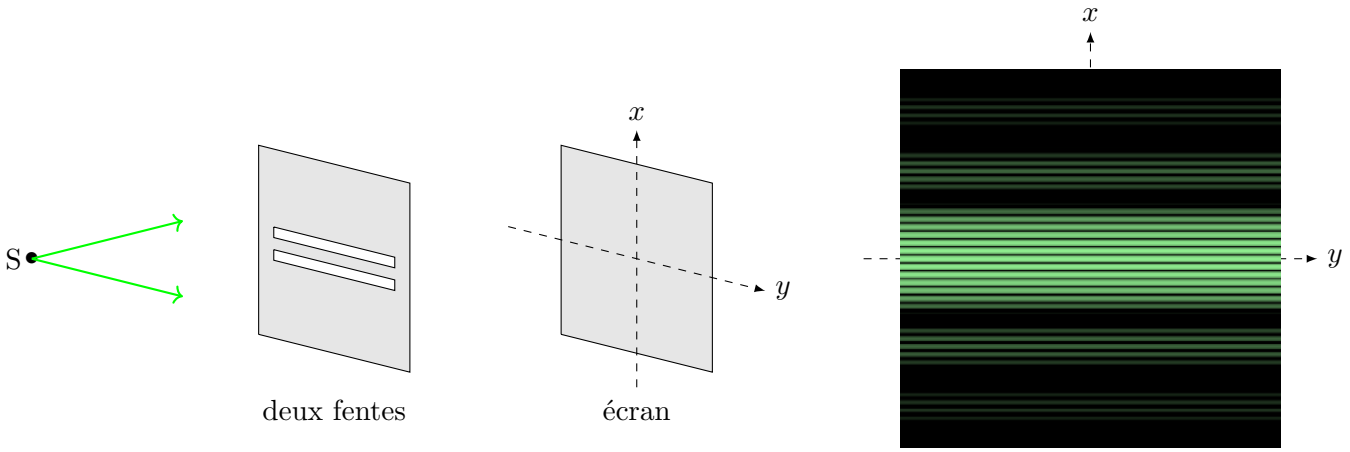
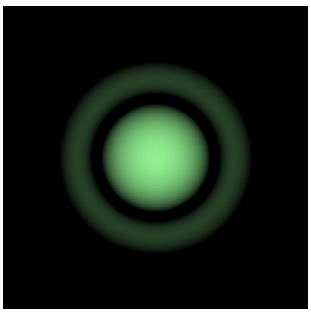


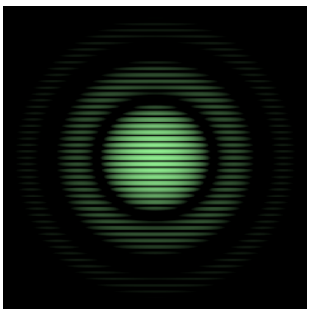
figure observée sur l'écran

La figure d'interférences observée sur l'écran est identique à celle obtenue avec le dispositif des trous d'Young comme l'intensité lumineuse est indépendante de la coordonnée y : elle est constituée d'une succession de franges brillantes et de franges sombres. En revanche, la figure de diffraction est celle obtenue par une fente fine : le disque et les anneaux concentriques sont remplacés par des bandes parallèles dont la luminosité diminue en s'éloignant du centre de l'écran.

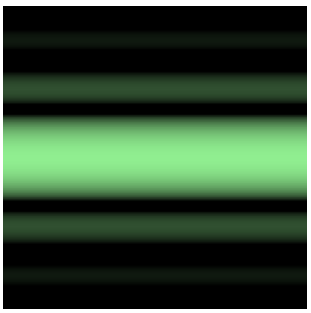
À titre de comparaison, on donne ci-dessous les figures observées sur l'écran pour les différents cas :



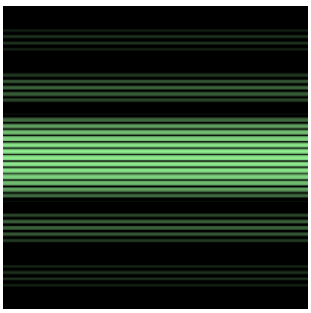
avec un trou
(diffraction uniquement)



avec deux trous
(diffraction et interférences)



avec une fente
(diffraction uniquement)



avec deux fentes
(diffraction et interférences)

En pratique, on préfère utiliser le dispositif des fentes d'Young plutôt que celui des trous d'Young pour étudier les interférences car il laisse passer davantage de lumière, la figure d'interférences observée est alors plus lumineuse.